$\boxed{1}$ 次の各問いに答えなさい．解答用紙には答えのみ記入すること．（48点）

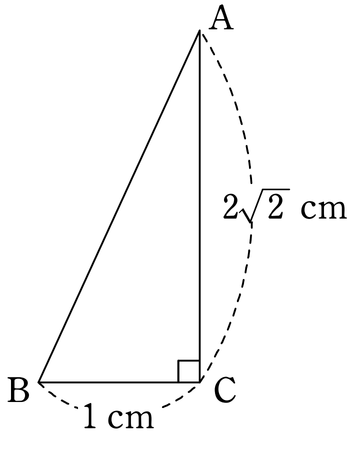
(1) $\sqrt{6}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ を計算しなさい．

(2) $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3b\right)^2\div\dfrac{3}{4}a^5b^4\times\left(-\dfrac{3}{2}ab^2\right)^3$ を計算しなさい．

(3) $x^2-4y^2-12yz-9z^2$ を因数分解しなさい．

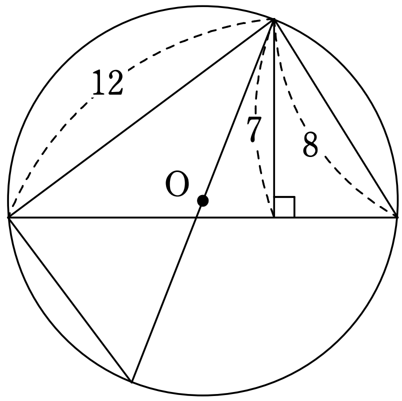
(4) 2つのさいころを同時に投げたとき，出た目の一方が他方の目の約数となる確率を求めなさい．

(5) 下の図は $AC=2\sqrt{2}$ cm，$BC=1$ cm，$\angle C=90^\circ$ の直角三角形である．この直角三角形を辺 AC を軸として1回転してできる立体の展開図は円と扇形を組み合せた図形になるが，その扇形の中心角の大きさを求めなさい．



(6)　正二十面体は20個の合同な正三角形からできており，1つの頂点に5つの面が集まっている．正二十面体の頂点の数と辺の数をそれぞれ求めなさい．

(7)　下の図において，円の半径を求めなさい．ただし，Oは円の中心とする．



(8)　今年は西暦2017年，和暦では平成29年である．2017と29はともに「4で割って1余る素数」であり，一般に「4で割って1余る素数」は2つの平方数の和で表されることが知られている．例 $2017=9^2+44^2$，$29=2^2+5^2$．
1から28までの数のうち，「4で割って1余る素数」をすべて求め，それらを上の 例 のように2つの平方数の和で表しなさい．

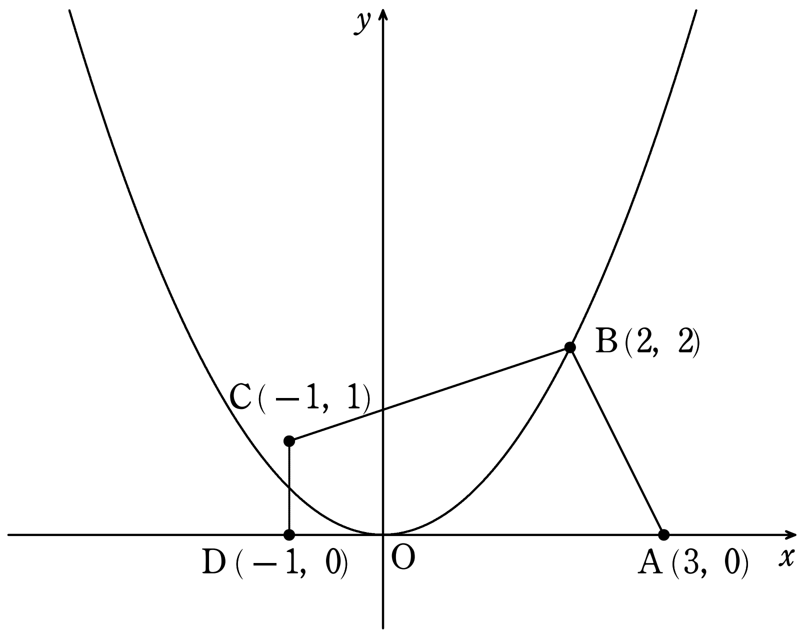
$\boxed{2}$　下の図のように，4点 A(3, 0), B(2, 2), C(−1, 1), D(−1, 0) を頂点とする四角形ABCDと点Bを通る放物線 $y=ax^2$ がある．このとき，次の問いに答えなさい．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（26点）

(1)　a の値と四角形ABCDの面積をそれぞれ求めなさい（答えのみ記入）．

(2)　y 軸の正の部分を動く点Pがある．四角形APCDの面積が四角形ABCDの面積と等しくなるとき，点Pの座標を求めなさい．

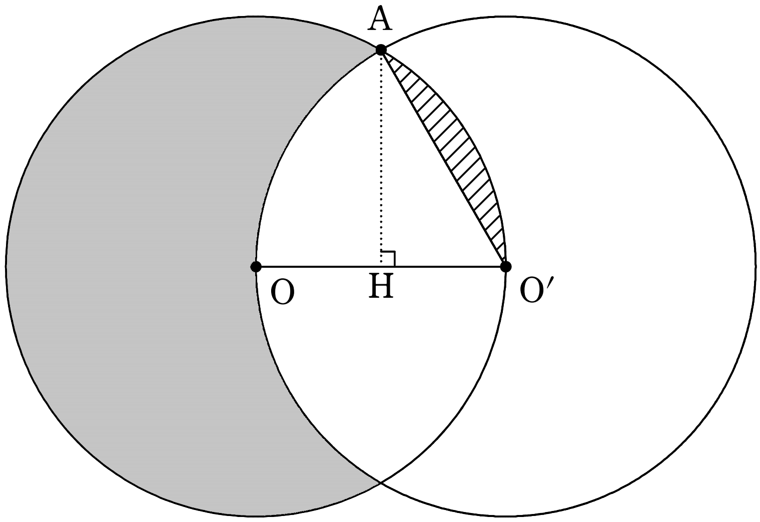
(3)　放物線と線分CDの交点をEとするとき，△OBEの面積を求めなさい．

(4)　放物線上を動く点Qがある．△BEQの面積が△OBEの面積の2倍になるとき，点Qの座標を求めなさい．



【　計　算　欄　】

3　図のように，半径 4 の 2 つの円 O と O′ が 2 点で交わっており，その交点の 1 つを A とする．また，一方の円は他方の円の中心を通っており，点 A から線分 OO′ へ下ろした垂線を AH とする．このとき，次の問いに答えなさい．ただし，円周率は π とする．（26 点）



(1) AH の長さを求めなさい．

(2) 斜線部の面積を求めなさい．

(3) 影をつけた図形の面積を求めなさい．

(4) 影をつけた図形からはみ出さないように半径 2 の円 P を配置し，さらに円 Q を円 O, O′, P のすべてに接するように配置するとき，円 Q の半径を求めなさい．ただし，円 Q の半径は円 P の半径よりも小さいものとする．

【 計 算 欄 】

受験番号		氏名		採点	

注意　解答はすべて途中の式や考え方も含めて解答用紙に記入しなさい．ただし，1，2(1) については答えのみでよろしい．

1

(1)		(2)	
(3)			
(4)		(5)	
(6)	頂点の数　　個，　辺の数　　本		
(7)			
(8)			

2

(1)

答　a の値　　　，　四角形 ABCD の面積

(2)

答

(3)

答

(4)

答

受験番号		氏名	

3

(1)

答

(2)

答

(3)

答

(4)

答

受験番号		氏名		採点	

注意　解答はすべて途中の式や考え方も含めて解答用紙に記入しなさい．ただし，1，2(1) については答えのみでよろしい．

1

(1)	$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	(2)	$-a^4b^4$
(3)	$(x+2y+3z)(x-2y-3z)$		
(4)	$\dfrac{11}{18}$	(5)	$120°$
(6)	頂点の数　12　個，　辺の数　30　本		
(7)	$\dfrac{48}{7}$		
(8)	$5=1^2+2^2$ $13=2^2+3^2$ $17=1^2+4^2$		

2

(1)

答　a の値　$\dfrac{1}{2}$　，　四角形 ABCD の面積　$\dfrac{11}{2}$

(2)　直線 AC と y 軸の交点を F とする．点 P が 線分 OF 上にあるとき，四角形 APCD の面積は四角形 ABCD の面積よりも小さい．よって，点 P は点 F の上方と考えてよい．このとき，四角形 APCD と四角形 ABCD で △ACD が共通であるから △APC＝△ABC となればよく，それには BP∥AC となるように点 P を定めればよい．

AC の傾きは $\dfrac{0-1}{3-(-1)}=-\dfrac{1}{4}$ より，AC に平行な直線の式は $y=-\dfrac{1}{4}x+b$ とおけ，これが B(2, 2) を通るとき

$2=-\dfrac{1}{4}\times2+b$　より　$b=\dfrac{5}{2}$

よって，B を通り AC に平行な直線の式は $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{2}$.

この直線と y 軸との交点は $\left(0,\ \dfrac{5}{2}\right)$.

これは y 軸の正の部分にあり，P として適する．

別解　四角形 ABCD を台形と三角形に分けて面積を求めると

$\dfrac{1}{2}\times(1+2)\times3+\dfrac{1}{2}\times1\times2=\dfrac{11}{2}$

点 P(0, y) とおくと（ただし $y>0$），

四角形 APCD の面積＝△PCD＋PDA であるから

$\dfrac{11}{2}=\dfrac{1}{2}\times1\times1+\dfrac{1}{2}\times4\times y$　より　$y=\dfrac{5}{2}$

（これは，$y>0$ を満たす）

答　$\left(0,\ \dfrac{5}{2}\right)$

(3)

直線 BE の式を $y=cx+d$ とおくと，

B(2, 2) と E$\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通るので

$$\begin{cases} 2=2c+d \\ \dfrac{1}{2}=-c+d \end{cases}\quad より\quad (c,\ d)=\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$$

（別解　BE の傾きを $\dfrac{2-\frac{1}{2}}{2-(-1)}=\dfrac{1}{2}$ と求めてから，

$y=\dfrac{1}{2}x+d$ とおいてもよい．）

よって，直線 BE の式は

$y=\dfrac{1}{2}x+1$

であるから，BE と y 軸との交点を G とすると G(0, 1).

したがって

$$\begin{aligned}△\mathrm{OBE}&=△\mathrm{OEG}+△\mathrm{OBG}\\&=\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times1\times2\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

答　$\dfrac{3}{2}$

(4)

H(0, 3) とすると，

△HBE の面積は △OBE の面積の 2 倍である．

H を通り直線 BE に平行な直線の式は

$y=\dfrac{1}{2}x+3$

これと放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ との交点が求める Q である．

2 式から y を消去して

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2&=\frac{1}{2}x+3\\x^2-x-6&=0\\(x+2)(x-3)&=0\\\therefore\quad x&=-2,\ 3\end{aligned}$$

ここで

$x=-2$ のとき　$y=2$

$x=3$ のとき　$y=\dfrac{9}{2}$

より，求める Q の座標は

$(-2,\ 2)$　および　$\left(3,\ \dfrac{9}{2}\right)$

答　$(-2,\ 2)$，$\left(3,\ \dfrac{9}{2}\right)$

受験番号		氏名	

3

(1)

$\triangle OO'A$ は，3辺がいずれも円の半径をなしていることから正三角形である．
よって，$\triangle AOH$ は内角が $30°$，$60°$，$90°$ の三角形より

$AO : AH = 2 : \sqrt{3}$
$4 : AH = 2 : \sqrt{3}$
$2AH = 4\sqrt{3}$
$\therefore\ AH = 2\sqrt{3}$

答　$2\sqrt{3}$

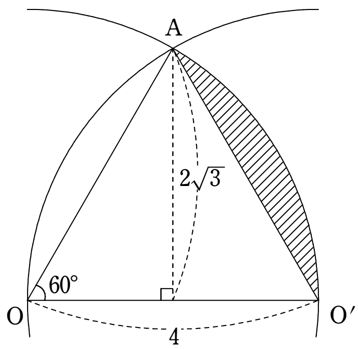
(2)

斜線部の面積＝扇形 $OO'A$ の面積－$\triangle OO'A$ の面積

$$= \pi \times 4^2 \times \frac{60}{360} - \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3}$$

$$= \frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}$$

参考



答　$\frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}$

(3)

影をつけた図形の面積

＝円 O の面積－{扇形 $O'AO$ の面積＋斜線部の面積}×2

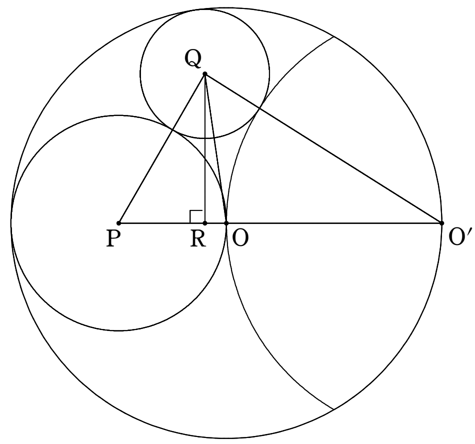
$$= \pi \times 4^2 - \left\{\pi \times 4^2 \times \frac{60}{360} + \left(\frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}\right)\right\} \times 2$$

$$= 16\pi - \left(\frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}\right) \times 2$$

$$= \frac{16}{3}\pi + 8\sqrt{3}$$

答　$\frac{16}{3}\pi + 8\sqrt{3}$

(4)



円 P の中心を P，円 Q の中心を Q とする．
また，円 Q の半径を x とし，点 Q から線分 PO' に下した垂線を QR とする．さらに，$PR = y$ とおく．
$\triangle QPR$，$\triangle QRO$，$\triangle QRO'$ において，
それぞれ三平方の定理を用いると

$QR^2 = PQ^2 - PR^2 = (2+x)^2 - y^2$　…①
$QR^2 = OQ^2 - OR^2 = (4-x)^2 - (2-y)^2$　…②
$QR^2 = O'Q^2 - O'R^2 = (4+x)^2 - (6-y^2)$　…③

①，②より

$(2+x)^2 - y^2 = (4-x)^2 - (2-y)^2$
$4 + 4x + x^2 - y^2 = 16 - 8x + x^2 - 4 + 4y - y^2$
$12x - 4y = 8$
$\therefore\ 3x - y = 2$　…④

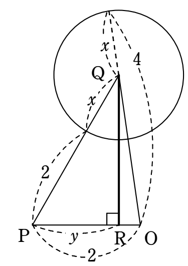
①，③より

$(2+x)^2 - y^2 = (4+x)^2 - (6-y)^2$
$4 + 4x + x^2 - y^2 = 16 + 8x + x^2 - 36 + 12y - y^2$
$4x + 12y = 24$
$\therefore\ x + 3y = 6$　…⑤

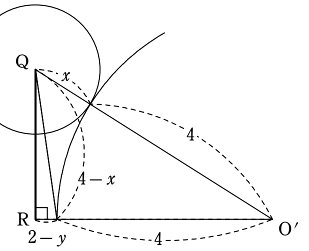
④，⑤を連立させて解くと

$(x,\ y) = \left(\frac{6}{5},\ \frac{8}{5}\right)$

参考　①，②の参考図



①，③の参考図



答　$\frac{6}{5}$